

海外新冠感染疫情的非广延模型及其拟合分析

刘洋, 王家乐, 于辰悦, 黄雨杰, 申可明, 刘旭升

东华理工大学理学院, 江西 南昌 330013

摘要: **目的** 海外输入病例对国内新型冠状病毒感染(简称新冠感染)疫情的影响日益严重,因此对海外疫情的发展进行深入的理论分析有助于研究者对新冠感染疫情的传播和演化有进一步的理论分析,从而更好地进行疫情防控。**方法** 对经典的易感者—感染者—移出者(susceptible-infected-recovered, SIR)模型进行非广延修正,提出了 q -SIR 模型并对美国、伊朗、印度和英国 2020 年初—2021 年初的确诊病例随时间的演化规律进行数据拟合,并结合拟合结果对非广延统计物理理论进行唯象分析。**结果** 拟合参数与各国疫情的具体发展情况存在密切的联系。外界干扰的存在,导致原始的理想化系统变得更加复杂,经过非广延修正后的 SIR 模型则可以对其发展趋势进行较好的拟合。疫情发展趋势相近的国家,对应的关键拟合参数非常接近。具体拟合参数为美国: $b = 0.287, \gamma = 15.546, q = 1.025$; 伊朗: $b = 0.238, \gamma = 17.793, q = 1.024$; 印度: $b = 0.753, \gamma = 3.461, q = 1.127$; 英国: $b = 0.745, \gamma = 2.166, q = 1.125$, 发现美国和伊朗、印度和英国的拟合参数 b 、 γ 和 q 比较接近。**结论** 拟合参数 q 能够很好地反映该系统受到的外界干预程度。外界干预的越多, q 的数值就越大。

关键词: 非广延统计物理; 新型冠状病毒感染; 易感者—感染者—移出者模型

中图分类号: R563.1⁺4 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-3110(2023)02-0245-05 **DOI:** 10.3969/j.issn.1006-3110.2023.02.031

基金项目: 国家自然科学基金(11947020); 东华理工大学博士科研启动基金(DHBK2019200 和 DHBK2019211)

作者简介: 刘洋(2001-), 男, 在读学士, 研究方向: 非平衡统计物理。

通信作者: 刘旭升, E-mail: liuxsh19@ecut.edu.cn。

数学模型,并借以对系统的未来进行预报^[6]。时间序列分析重点观察变量在时间上的发展变化规律并建立分析模型,进行趋势预测^[1]。ARIMA 模型已经成功的应用在公共卫生等疾病的预测上^[7],为卫生事业的预警提供理论上的数学模型支持。

通辽市位于内蒙古东部,紧邻辽宁省、吉林省,是东北的重要交通枢纽。对着交通物流业的发展,货物运输及人员来往频繁,同时随着全球温度的变暖,一些主要活动在低纬度、高温地区的蚊虫开始向北方迁移,这就为该地的蚊媒传染病的防控带来了压力。为通辽市人民的身体健康不受蚊媒传染病的威胁,做好蚊媒传染病的预防工作,这就要求在大型活动举办之前或者定期做蚊媒传染病风险评估^[8]。影响蚊媒传染病发生的因素有蚊虫种类、密度、气候、孳生地、抗药性、虫媒传染病输入情况等因素,其中蚊虫的种类密度在风险评估中占有影响分值比例较大。在对风险的预先预判时,则需要建立可靠的模型对未来蚊虫的密度进行精准的预测,本研究在原有蚊密度监测数据的基础上^[9],通过拟合 ARIMA 数学模型对 2022 年的成蚊密度进行预测,国内相关研究表明,在预测过程中实际值均落入预测值 95% CI 范围内^[10],表明通过此方法得到的预测值,可以进行风险评估。通过此预测值为组

织各类消杀和医疗防控等各项卫生应急储备提供了参考依据。

参考文献

- [1] 高国激,郭常义,周义军. 时间序列分析在我国公共卫生领域的应用[J]. 中国社会医学杂志,2011,28(2):78-80.
- [2] 邵华,王琦琦,胡跃华,等. 中断时间序列分析及其在公共卫生领域中的应用[J]. 中华流行病学杂志,2015,36(9):1015-1017.
- [3] 周美艳,黄颖,颜宇龙,等. 指数平滑法和 ARIMA 模型在学生肺结核预测的应用[J]. 实用预防医学,2022,29(1):18-21.
- [4] 刘起勇. 新时代媒介生物传染病形势及防控对策[J]. 中国媒介生物学及控制杂志,2019,30(1):1-6.
- [5] 黄振宇,王广力,李燕,等. 2010—2016 年深圳市宝安区蚊媒传染病与蚊虫密度季节消长相关性分析[J]. 预防医学论坛,2017,23(3):204-205.
- [6] 潘红宇. 时间序列分析及应用[M]. 北京:机械工业出版社,2011:8-20.
- [7] 聂艳武,郑彦玲,孙亚红,等. 基于季节性 ARIMA 模型的新疆肺结核发病预测分析[J]. 实用预防医学,2021,28(11):1324-1327.
- [8] 阎利敏,师佳佳,张月泉,等. 2019 年第十一届全国少数民族传统体育运动会病媒生物危害识别与风险评估[J]. 中国媒介生物学及控制杂志,2020,31(4):457-461.
- [9] 司晓艳,侯坤,南晓伟,等. 2017—2019 年通辽市蚊虫监测结果分析[J]. 上海预防医学,2020,32(12):980-987.
- [10] 阎利敏,师佳佳,张月泉,等. 差分自回归移动平均模型在蚊密度分布特征预测中的应用[J]. 中国媒介生物学及控制杂志,2020,31(1):21-26.

收稿日期:2022-02-16

Non-extensive SIR model and its fitting analysis for the SARS-CoV-2 pandemic overseas

LIU Yang, WANG Jia-le, YU Chen-yue, HUANG Yu-jie, SHEN Ke-ming, LIU Xu-sheng

School of Science, East China University of Technology, Nanchang, Jiangxi 330013, China

Corresponding author: LIU Xu-sheng, E-mail: liuxsh19@ecut.edu.cn

Abstract: **Objective** The impact of imported cases from overseas on the domestic epidemic of SARS-CoV-2 infection is becoming more and more serious; and hence, in-depth theoretical analysis of development of the epidemics in overseas countries will help the researchers have a better understanding of the spread and evolution of the epidemic of SARS-CoV-2 infection so as to better prevent and control the epidemic. **Methods** A non-extensive correction of the classic susceptible-infected-recovered (SIR) model was made and the q -SIR model was proposed to fit the growth law of confirmed cases over time in the United States, Iran, India, and the United Kingdom from the beginning of 2020 to early 2021. Phenomenological analysis on non-extensive statistical physics theory is also performed by combining the specific fitting results. **Results** The fitting parameters were closely related to the specific development of the epidemic in various countries. The existence of external interference made the original idealized system more complicated, and the non-extensive SIR model could better fit its development trend. For countries with similar epidemic development trends, the corresponding key fitting parameters were very close. More explicitly, the corresponding fitting parameters were: $b=0.287$, $\gamma=15.546$ and $q=1.025$ for United States, $b=0.238$, $\gamma=17.793$ and $q=1.024$ for Iran, $b=0.753$, $\gamma=3.461$ and $q=1.127$ for India, and $b=0.745$, $\gamma=2.166$ and $q=1.125$ for the United Kingdom. It could be found that the fitting parameters b , γ and q of the United States and Iran as well as those of India and the United Kingdom were relatively close. **Conclusion** The fitting parameter q can well reflect the degree of external interference received by the system. The more the external intervention, the greater the value of q .

Keywords: non-extensive statistical physics; SARS-CoV-2 infection; susceptible-infected-recovered model

2019 年 12 月底,武汉发现新型冠状病毒感染的肺炎。随后,新型冠状病毒感染(简称新冠感染)疫情大面积暴发^[1]。我国迅速采取相应措施,疫情很快得到有效控制。然而,当国内疫情防控局面逐渐好转时,新冠感染疫情却在海外迅速蔓延,确诊病例也是大幅度增加^[2-3]。因此,对海外疫情的发展情况加以实时关注并对其进行深入的理论分析十分必要。这不仅有利于人们对新冠感染疫情的传播和演化有进一步的了解,从而能采取更有效的疫情防控措施,同时由于海外输入病例对国内疫情的影响日益明显也使得该研究对国内疫情的实时防控有着不可或缺的帮助。疫情的快速蔓延引起了科研人员的广泛关注,目前国内外已有大量的相关研究报道^[4-8]。考虑到新冠感染疫情的传播特征,易感者-感染者-移出者(susceptible-infected-recovered, SIR)模型及其变种被诸多研究人员应用于疫情的发展规律研究之中^[7-8]。原始的 SIR 模型对于理想系统中的流行病传播过程可以做出很好的预测。然而对于新冠感染疫情,随着其日益扩大的全球化影响和严重性,人与人之间的相互作用、地区之间的差异和联系以及政府对其采取的诸多防疫措施等,使该系统已经无法再简单地视为理想系统。这就需要新的理论对该模型进行优化从而更好地描述和分析新型冠状病毒感染疫情的传播规律。

上世纪末提出并得到广泛应用的 Tsallis 非广延统

计物理理论^[9-12],通过拓展系统的熵的表达式,引入非广延参数 q ,对于解决经典的理想系统之外的各种实际问题有很好的适用性。因此,本研究应用非广延理论对 SIR 模型进行了修正,得到 q -SIR 模型,并使用该模型对不同国家的新冠感染疫情传播进行了系统的对比研究。

1 方 法

1.1 非广延下模型的提出 作为经典的 Boltzmann 统计物理的拓展和延伸,非广延统计是一门全新的统计物理学模型^[9-12]。通过引入一个非广延参量 q ,他旨在处理和解决经典统计适用范围之外的更多实际物理问题和现象,诸如包含了长程相互作用以及具有记忆效应的复杂系统等。非广延统计物理的出发点就是,对经典统计中的 Boltzmann 熵的数学形式进行推广改写成更为一般的普适情况,从而解决更为广泛的问题。接下来,研究者将从一个数学隐喻出发,加以推广,给出数学上较之指数函数更为一般的结果。

众所周知,最简单的微分方程可写成

$$\frac{dy}{dx} = C \quad (1)$$

显然,其对应初始条件为 $y(0)=1$ 的解为常数函数 $y(x)=Cx+1$;其次,考虑右边为自变量的幂次形式,即

$$\frac{dy}{dx} = x^q \quad (2)$$

对应的解 $[y(0)=1]$ 为 $y(x)=\frac{1}{1+q}x^{1+q}+1$ 。而所熟知的指数函数 $y(x)=\exp(x)$,则是微分方程

$$\frac{dy}{dx} = y \quad (3)$$

在初始条件 $y(0=1)$ 下的解。他的反函数就是对数函数。进一步地,对微分方程(3)进行推广,即

$$\frac{dy}{dx} = y^q \quad (4)$$

其初始条件 $y(0)=1$ 为的解为

$$y(x) = [1 + (1-q)x]^{\frac{1}{1-q}} = \exp_q(x) \quad (5)$$

这里引入 q -指数的定义。他的反函数定义为 q -对数

$$y(x) = \frac{x^{1-q}-1}{1-q} = \ln_q(x) \quad (6)$$

显然,当 $q \rightarrow 1$ 时,所有的结果都回归到方程(3)对应的情况,而所谓的 q -对数和 q -指数都又回到了通常的对数和指数函数。可以从上面的推导过程中清晰地看到,这里引入的 q -对数(指数)是对普通的对数(指数)函数的一个较好的推广;在参数 q 趋于 1 时,其又回归到后者。接下来,将对两者做进一步的对比分析。见图 1,无论 q 取值如何, q -对数都和普通的对数函数一样,单调递增,且所有的 q -对数都满足关系 $\ln_q 1=0$ 。对于同一个 x 值,随着 q 值的增大,相应的函数值反而随之减小。从图 1 中还可以看出,当 $q < 0$ 时, q -对数的变化趋势与 >0 的情况略有不同; q 取非正整数时,可以看到所谓的 q -对数其实就是一般的幂次函数。除此之外,所有的 q -对数函数对应自变量 x 的取值范围都应当是 $x \in (0, \infty)$ 。而对于 q -指数,有类似的结果,见图 1B。

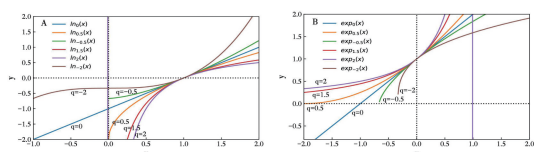
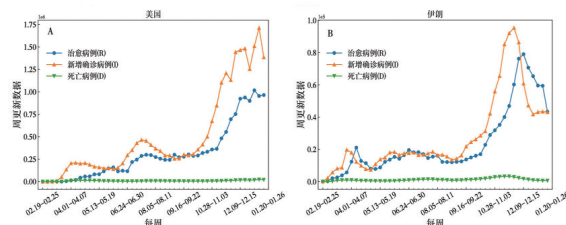


图 1 不同 q 值下的 q -对数函数(A)和 q -指数函数(B)的对照



注:数据采集时间从 2020 年 2 月 19 日—2021 年 1 月 19 日。
图 2 美国(A)、伊朗(B)、印度(C)和英国(D)四个国家的疫情数据随时间的变化情况

1.2 q -SIR 模型计算 基于上述讨论,通过引入这样一个非广延参数 q ,可以更好地推广已有的理论模型对理想状态之外的研究系统进行重新理论解析,得到更为一般性的结果。这里重新考虑了传染病模型中最简单的 SIR 模型的演化方程。关于易感人群,由于研究对象的庞大,加上人口的复杂,新冠感染病毒的不确定性,研究者认为整个系统的总人数可以近似为这里的易感人群,即 $S(t) \approx N = \text{Const}$ 。同时由于每日新增死亡人数相对于确诊和治愈病例数较少,可以认为死亡人数对确诊人数的影响可以忽略。而对于治愈病例的演化方程,研究者仍然认为是正比关系,后续考量对于不同的国家、地区以及不同时间节点的时空异质性时再加以更为复杂的修正。这里重点分析了关于感染人群的演化关系,由于易感人群的固定 $S(t) = N$,但是感染系数的复杂性,致使此处不再是线性关系,类比非广延物理中的处理方法,假定为 $b \cdot I^q(t)$ 。因此,本研究给出了一个非广延推广后的 q -SIR 模型的演化方程:

$$\frac{dS(t)}{dt} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = bI^q(t) - \gamma I(t) \quad (8)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) \quad (9)$$

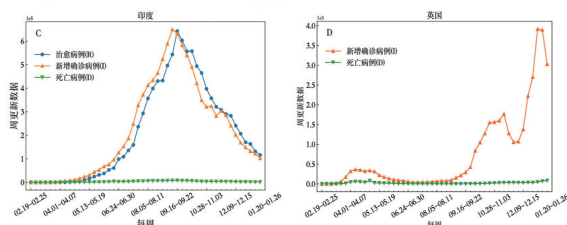
可得解为:

$$S(t) = N \quad (10)$$

$$I(t) = A \{1 - \text{Bexp}[-\gamma(1-q)t]\}^{\frac{1}{1-q}} \quad (11)$$

$$R(t) = \frac{A}{\gamma(2-q)} \{1 - \text{Bexp}[-\gamma(1-q)t]\}^{\frac{1}{1-q}} \quad (12)$$

更精确的结果见脚注 1。当时间为小量时,其形式趋于 q -指数分布,即幂次律分布形式;当时间很大时, $I(t) = \{ \frac{b}{\gamma} - \exp[\gamma(1-q)(t_0-t) + \frac{1}{\gamma(q-1)} \ln(b - \gamma I_0^{1-q})] \}^{\frac{1}{1-q}}$ 。则接近于自然指数分布。在下一章节,研究者将详细阐述如何用这样一个修正后的 q -SIR 模型的感染病例演化方程对实际海外数据进行拟合并加以分析。



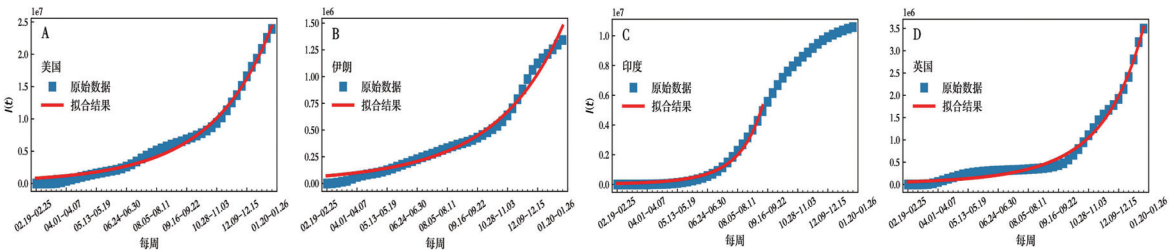
2 结 果

研究者首先对图 2 进行分析,分别展示了美国、伊朗、印度和英国从 2020 年 2 月中旬—2021 年 1 月中旬的新冠感染疫情发展趋势。图中展示的数据来源于疫情数据共享网站(https://voice.baidu.com/act/newpneumonia/newpneumonia/?from=osari_pc_3 和 <https://coronavirus.1point3acres.com>), 时间截至 2021 年 1 月 19 日。采用的数据包包含对应国家每日新增确诊病例数、每日治愈量以及每日死亡病例数,并针对每组数据分别计算出对应的每周累计人数。通过该图看出,不同国家的每日新增确诊人数、每日治愈量和每日死亡人数随着时间的变化趋势有所差异。结果显示,不同的国情、管理制度以及对新冠感染疫情的控制策略,对新冠感染疫情发展趋势有较大的影响。通过图 2 可以看出,美国、伊朗和英国三个国家的每日新增确诊病例从 4 月初开始变得稳定,并在随后出现下降的趋势,体现其主要原因是随着海外疫情变得越来越严重,全球各个国家都加强了疫情防控措施。然而,当时印度虽然也采取了一定的防疫举措,但在人口密度大、医疗条件有限等因素的影响下,防控措施难以得到快速有效的实施,从而导致疫情在暴发初期就难以得到控制,每日新增确诊人数在不断攀升。8 月中旬,美国(图 2A)、伊朗(图 2B)以及英国(图 2D)的疫情再次大暴发,每日新增病例上升的趋势变得更快。虽然在疫情前期这些国家采取了短暂的抗疫举措,但是公众对于这次疫情的重视程度依然较低,加之他们在第一轮疫情期间并未做到彻底控制疫情的情况下开始解封,实行复工复产,导致人群聚集度变得更大,感染概率大幅度增加。然而此时印度的疫情出现拐点,每日新增病例数量呈下降趋势。

为了对比研究不同国家的外界干预因素对疫情发展的影响,用方程(11)分别对美国、伊朗、印度和英国这四个国家的每周累计确诊病例进行非线性拟合。如图 3 所示,非广延下的 q -SIR 模型得出的结果可以很好地拟合这四个国家的疫情发展趋势。其中美国、伊

朗和英国的拟合数据所属时间段为 2020 年 2 月 19 日—2021 年 1 月 19 日,印度的拟合数据所处时间段为 2020 年 2 月 19 日—9 月 15 日,拟合参数为: a 、 b 、 γ 和 q 。表 1 就是对上述四个国家的拟合图像与拟合参数数据,这些结果更直观地展示了不同国家新冠感染疫情发展规律的联系和差异。从图 3 中的拟合曲线(红色曲线)可以看出,四个国家的疫情发展都可以分为两个阶段:疫情暴发初期,累计确诊病例增长较为缓慢;随后一段时间,其增长趋势迅速提升。这是因为 2 月份,国外疫情情况较轻,尚未出现大规模传播,所以增长较慢;之后由于疫情防控措施落实不到位,疫情开始大面积蔓延后,其增长趋势也就越来越快。同时还可以看出美国和伊朗的拟合曲线(图 3A 和 3B)的走势极为接近,他们都有一个较长的缓慢增长的时间,然后增长速度逐渐变快,这与两个国家对疫情的防控力度和人口分布情况相似是密不可分的。在疫情防控力度方面,由于美国对疫情防控的不重视,国民防控意识较差,而伊朗因为国内经济状况欠佳,难以维持正常的防控措施,从而使得他们的防控程度大致相同;在人口分布方面,两个国家的人口密度都不超过 50 人/ km^2 ,疫情扩散较慢。研究者还发现印度和英国的拟合曲线(图 3C 和 3D)走势相近。相对于美国和伊朗的走势,这两个国家的疫情增长缓慢期持续的时间较短,大面积暴发开始的时间较早。这主要是因为印度和英国的人口密度较大,分别为 445 人/ km^2 和 270 人/ km^2 ,比美国和伊朗的人口密度更大,导致相对于美国和伊朗的疫情扩散速度更快。之后,由于英国大面积解封,推动复工复产,致使疫情再次暴发,确诊病例增长速度迅速提升。印度由于一直保持相应的防控措施,疫情增长达到了饱和,增长趋势逐渐放缓。

表 1 四个国家对应的新冠感染疫情确诊病例拟合参数				
国家	a	b	γ	q
美国	1	0.287	15.546	1.025
伊朗	1	0.238	17.793	1.024
印度	1	0.753	3.461	1.127
英国	1	0.745	2.166	1.125



注:数据采集时间从 2020 年 2 月 19 日—2021 年 1 月 19 日。横坐标表示时间,以周为单位。

图 3 美国(A)、伊朗(B)、印度(C)和英国(D)的感染病例随时间的变化情况及其拟合结果,拟合公式为方程(11)

通过分析,研究者发现拟合参数(见表 1)与各国疫情发展存在密切的联系。表 1 列出了采用方程(11)针对四个不同国家的数据进行拟合所得到的拟合参数。从表中参数数据,可以看出拟合参数 b 、 γ 和 q 之间联系密切。疫情发展趋势相近的国家,他们的拟合参数 b 、 γ 和 q 也非常接近,例如:美国和伊朗,英国和印度。而对于参数 a ,在拟合时,由于拟合所选用的每个国家的数据在前几周就达到了较大的数值,研究发现参数 a 在可调节范围内的变化对拟合结果的影响较小。相对来说,对疫情发展干预程度较弱的美国 and 伊朗,他们的拟合图像更接近 e 指数增长,对应的拟合参数 q 的值都比较小,接近 1。而干预程度稍强的印度和伊朗,他们的拟合图像与 e 指数增长趋势偏离程度较大,对应的拟合参数 q 的值相对较大。

由此可见,一些外界干扰的存在,导致原始的理想化系统变的更加复杂。一般来说,经典的 SIR 模型难以描述这样的系统,而修正后的 SIR 模型则可以对其发展趋势进行较好的拟合。并且在这样一个复杂系统中,参数 q 能够很好地反映该系统受到的外界干预程度。

3 讨论

在本研究中,使用了非广延修正后的 q -SIR 模型分别对美国、伊朗、印度和英国新冠感染的累计确诊病例数进行非线性拟合。通过对这四个国家的新冠感染疫情发展情况进行对比分析,给出了非广延参数 q 在本工作中对应的物理含义。对于传统的传染病模型,如 SIS 模型、SIR 模型、SEIR 模型等,这些模型仅适合研究理想状态下传染病的传播规律。而新冠病毒在海外的传播过程中,一方面各国政府为了控制疫情的扩散,都会采取相应的治疗与防控措施;另一方面,由于季节的更替以及感染过程中人体免疫力的增强,病毒传染能力也会随之发生相应改变。这些因素都不可避免地影响新冠病毒的传播,使该类系统不再是理想情况下的经典系统。因而传统的传染病传播模型不再适用于对新冠感染疫情传播规律的研究。然而,这些外部因素都可以考虑在非广延的理论框架内,因此本项工作对经典的 SIR 模型进行了非广延修正,提出了 q -SIR 模型并对不同国家的新冠感染疫情发展情况进行了系统的对比研究。

使用修正后的 q -SIR 模型对海外疫情的研究分析是十分有意义的,这不仅有利于我国对境外输入病例的防控,还能通过拟合结果反过来对非广延物理理论本身进行诠释和进一步的唯象研究分析。具体来说,

在这项工作中,所使用的函数拟合效果良好。通过对不同国家的疫情发展情况和对疫情防控程度的对比分析,所得到的不同国家的拟合参数 q 与该国新冠病毒的传播情况较为符合。对于不同国家参数 q 的异同,也能够根据他们所采取的措施和国家所处的情况给出较为合理的解释。

本研究中,采用非广延统计物理中的标准做法,对已有的传染病数据进行唯象拟合,得出 q 参数的具体数值,然后系统接下来的演化以此为参考进行预测。预测一定是基于该国家、地区的具体防疫措施、人口分布等因素基本保持不变的前提之下;但如果预测和实际结果出现较大偏差,一样也可以合理推断,该国家、地区的防疫措施、人口分布等一个或者几个重要因素发生了较大变动。例如美国刚开始的防疫和后来的情况就截然不同,那么用疫情扩散早期的数据拟合结果来预测后面的演化情况,显然会出现偏差。

本研究对海外不同国家的新冠感染疫情的研究结果能够清楚的展示非广延统计物理对具体复杂问题的适用性。此外,该研究对更好的理解非广延统计物理的概念也有着十分重要的意义。如何去更充分的解释非广延统计物理,尤其是此处参数 q 的物理含义,这也是研究者今后在这方面工作中的重要任务之一。

参考文献

- [1] Zu ZY, Jiang MD, Xu PP, et al. Coronavirus disease 2019 (COVID-19): a perspective from China[J]. Radiology, 2020, 296(2): E15-E25.
- [2] 盛华雄, 吴琳, 肖光亮. 新冠肺炎疫情传播建模分析与预测[J]. 系统仿真学报, 2020, 32(5): 759-766.
- [3] World Health Organization. Coronavirus disease 2019 (COVID-19) weekly epidemiological update and weekly operational update [EB/OL]. (2021-01-20) [2021-10-30]. <https://www.who.int/emergencies/diseases/novel-coronavirus-2019/situation-reports>.
- [4] 林春文, 徐霖, 谢宇荀, 等. 国内本土及境外输入性 COVID-19 病例流行特征分析[J]. 实用预防医学, 2021, 28(3): 261-265.
- [5] 田克卿, 刘天, 蔺茂文, 等. 两种风险评估方法在 COVID-19 疫情研判中的应用[J]. 实用预防医学, 2021, 28(2): 153-156.
- [6] Wölfel R, Corman VM, Guggemos W, et al. Virological assessment of hospitalized patients with COVID-19 [J]. Nature, 2020, 581(7809): 465-469.
- [7] Hassen HB, Elaoud A, Salah NB, et al. A SIR-poisson model for COVID-19: evolution and transmission inference in the Maghreb Central Regions[J]. Arab J Sci Eng, 2021, 46(1): 93-102.
- [8] 喻孜, 张贵清, 刘庆珍, 等. 基于时变参数-SIR 模型的 COVID-19 疫情评估和预测[J]. 电子科技大学学报, 2020, 49(3): 357-361.
- [9] Tsallis C, Brigatti E. Nonextensive statistical mechanics: a brief introduction[J]. Continuum Mech Thermodyn, 2004, 16(3): 223-235.
- [10] 曹克非, 王参军. Tsallis 熵与非广延统计力学[J]. 云南大学学报: 自然科学版, 2005, 27(6): 514-520.
- [11] 李鹤龄, 宋金国, 雷润洁. 非广延统计力学与完全开放系统的统计分布[J]. 大学物理, 2010, 29(5): 17.
- [12] 郭然. 非广延统计的基本问题和随机动力学基础[D]. 天津: 天津大学, 2015.

收稿日期: 2021-09-27